

Юсипів Т. В.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Курилко О. Б.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ДОСЛІДЖЕННЯ РОБАСТНОЇ СТІЙКОСТІ ГРАНИЧНИХ РЕЖИМІВ У СИСТЕМАХ ТИПУ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ З РОЗПОДІЛЕНОЮ ПЕРЕДАЧЕЮ СИГНАЛУ

Стаття присвячена дослідженню робастної стійкості телекомунікаційних систем до просторово розподілених електромагнітних перешкод зі складною спектральною структурою. Основний підхід базується на математичному моделюванні за допомогою систем реакції-дифузії, які описують динаміку сигналів у середовищах зі змінними параметрами. Метою роботи є аналіз стійкості граничних режимів цих систем за наявності зовнішніх збурень.

У фокусі дослідження – дисипативні системи, які в незбуреному стані мають глобальний атрактор. При введенні зовнішнього сигналу система стає неавтономною, що ускладнює аналіз її поведінки. Ключовим завданням є оцінка відхилення траєкторій системи від положення рівноваги – глобального атрактора. Для цього використовується теорія стійкості від входу до стану (input-to-state stability, ISS), яка пропонує два типи оцінок: локальну (local ISS) та нелокальну (асимптотичне підсилення, asymptotic gain, AG). Ці оцінки дозволяють кількісно охарактеризувати відхилення траєкторій залежно від амплітуди зовнішнього сигналу.

Особливістю роботи є аналіз систем із негладкими нелінійностями, для яких не гарантується єдиність розв'язків. Для цього застосовуються багатозначні напівпотоки та напівпроцеси, а також теорія рівномірних атракторів. Використовується результат про напівнеперервну зверху залежність від параметра, що дозволяє досліджувати поведінку системи в умовах змінних зовнішніх впливів.

Результати дослідження застосовні до широкого класу моделей, таких як системи ФіцХ'ю–Нагумо, багатовимірні системи Лотки–Вольтерра з дифузією та інші моделі реакції-дифузії. Запропоновані методи сприяють підвищенню надійності телекомунікаційних систем в умовах непередбачуваних збурень. Крім того, отримані оцінки стійкості можуть бути використані для оптимізації роботи систем зв'язку, що функціонують у складних електромагнітних середовищах, а також для розробки нових алгоритмів адаптивного керування, які забезпечують стійкість до зовнішніх впливів.

Ця робота відкриває перспективи для подальших досліджень у сфері моделювання складних нелінійних систем, зокрема в контексті їхньої стійкості до багатовимірних і нестационарних збурень, що є актуальним для сучасних телекомунікаційних технологій.

Ключові слова: сигнал, система реакції-дифузії, глобальний атрактор, робастність, стійкість.

Постановка проблеми. Підвищення стійкості телекомунікаційних каналів і ефективності систем передавання сигналів та інформації є однією з найактуальніших проблем сучасної теорії й техніки комунікаційних та інформаційних технологій. Джерела промислових і побутових перешкод дуже різноманітні, і їх кількість постійно зростає. Це зумовлено тим, що під час роботи будь-якого електромагнітного пристрою виникає електромагнітне випромінювання. Перешкоди створюють побутові прилади, електрообладнання, висковольтні лінії електропередачі, промисловий електротранспорт тощо. При цьому джерела електромагнітного випромінювання розподілені у просторі довільно та хаотично, а їхній вплив

тим сильніший, чим ближче вони розташовані до телекомунікаційного обладнання.

З погляду електромагнітної сумісності, під зовнішніми перешкодами розуміють випромінювання, створювані в широкому діапазоні частот зовнішніми джерелами найрізноманітнішої природи щодо телекомунікаційних пристроїв і комплексів. Такими джерелами можуть бути різні елементи технічних систем, що створюють електромагнітні поля. Найбільш небезпечними для систем передавання сигналів є ті пристрої, які генерують шкідливі сигнали зі складовими у тому самому частотному діапазоні, що й корисний сигнал. Такі компоненти легко проходять через вхідні фільтри приймальних пристроїв, обробляються

так само, як і корисний сигнал, і, таким чином, спотворюють інформацію.

Інтенсивність, частотні характеристики та спектральні властивості технічних шумів дуже різноманітні. Це можуть бути як випадкові електромагнітні збурення, так і функції, які періодично повторюються в часі. У таких умовах, окрім дифракційних явищ, починають проявлятися й процеси дифузії. Чим «гетерогенніше» середовище функціонування телекомунікаційної системи, тим суттєвіший вплив дифузійних процесів на її стійкість до збурень.

Захищеність – це здатність телекомунікаційних систем функціонувати ефективно попри дію різного роду перешкод. Робота всіх елементів таких систем і комутаційних пристроїв неминуче супроводжується паразитним випромінюванням з різними частотними та енергетичними характеристиками. У сучасних умовах кількість і складність телекомунікаційних систем стрімко зростає, а разом із ними – і кількість джерел перешкод. Зростаюча складність телекомунікаційних систем лише підсилює потребу в розробці математичних моделей, здатних адекватно описувати динаміку в умовах постійної дії просторово-розподілених збурень. Також важливим завданням є оцінка відхилень динаміки таких систем у відповідь на зовнішні збурення, що дозволяє гарантувати їхню надійність та функціональність у реальних умовах експлуатації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Системи типу реакції-дифузії природним чином виникають у математичному моделюванні телекомунікаційних процесів, зокрема при описі динаміки сигналів у складних середовищах із просторово розподіленими збуреннями. Прикладами таких збурень є електромагнітні перешкоди, що

створюються побутовими приладами, промисловим обладнанням, електротранспортом тощо. Джерела таких перешкод є розподіленими, непередбачуваними й охоплюють широкий діапазон частот, що ускладнює фільтрацію шкідливих сигналів.

Перешкоди та шуми в телекомунікаційних системах також можуть зумовлювати виникнення певних класів автоколивань. Поряд із добре відомими автоколиваннями, які описуються класичною моделлю Ван дер Поля, ми стикаємося з ситуаціями, що найповніше описуються моделлю ФіцХ'ю–Нагумо [1]:

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + \sigma v - \gamma u \\ v_t = v_{xx} + f(v) - u \end{cases}$$

Ці моделі лежать в основі аналізу стійкості та робастності динаміки телекомунікаційних систем у змінних і складних середовищах. Модель ФіцХ'ю–Нагумо є спрощеною двовимірною версією моделі Ходжкіна–Гакслі [2], яка детально описує динаміку імпульсного нейрона. В оригінальних статтях ФіцХ'ю ця система називалася осцилятором Бонхеффера–Ван дер Поля, оскільки включає осцилятор Ван дер Поля як окремий випадок.

Постановка завдання. Метою статті є дослідження стійкості граничних режимів у загальних системах типу реакції-дифузії, окремим випадком яких є модель ФіцХ'ю–Нагумо. У дисипативних еволюційних системах такі режими зазвичай описують у термінах глобального атрактора [3, 4]. Для задач, де не гарантовано єдиність чи регулярність розв'язків, а також для задач керування з сингулярними збуреннями, відповідну теорію було розроблено в [5–10].

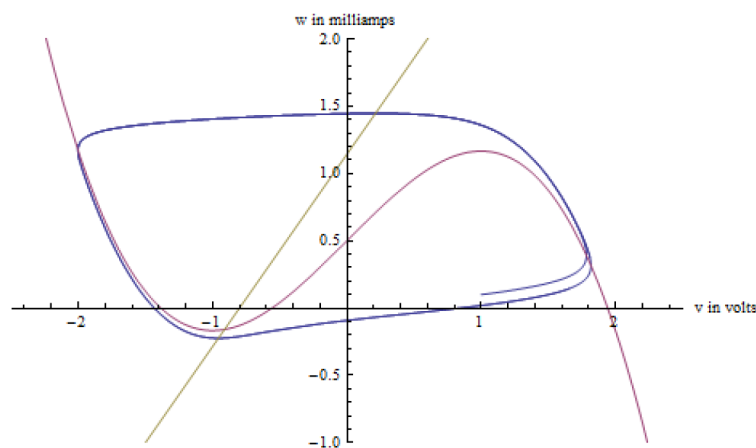


Рис. 1. Трасекторія моделі ФіцХ'ю–Нагумо у фазовому просторі (синя лінія), кубічна нулькліна (рожева лінія), лінійна нулькліна (жовта лінія)

Якщо автономна система з глобальним аттрактором зазнає дії зовнішніх сигналів (збурень), постає природна задача – оцінити відхилення траєкторії збуреної системи від глобального атрактора незбуреної системи як функцію величини сигналу. Для таких оцінок в статті використовується теорія стійкості від входу до стану (input-to-state stability, ISS) [11], яку нещодавно було поширено на нескінченновимірні системи з нетривіальними аттракторами [12–14]. Оцінка встановлюється в термінах функцій порівняння [15].

Робастна стійкість може виражатися в різних підходах [16], проте в цій роботі використовуються два ключові з них, які є взаємодоповнюючими:

- 1) локальна стійкість у сенсі входу до стану (local ISS);
- 2) стійкість у сенсі асимптотичного підсилення (asymptotic gain, AG).

При цьому, оцінка робастної стійкості системи реакції-дифузії з негладкими функціями взаємодії (що не гарантують єдиності розв'язків) наводиться у природних нескінченновимірних фазових просторах.

Виклад основного матеріалу. В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ розглядається наступна система типу реакції-дифузії

$$\begin{cases} y_t = a\Delta y - f(y) + h(x) + d, & x \in \Omega, t > 0, \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де $y = y(t, x) = (y^1(t, x), \dots, y^N(t, x))$ – невідома вектор-функція, $f = (f^1, \dots, f^N)$, $h = (h^1, \dots, h^N)$ – задані вектор-функції, a – дійсна матриця розмірності $N \times N$ така, що $\frac{1}{2}(a + a^*) \geq \mu I$, $\mu > 0$, $d = (d^1, \dots, d^N)$ – вхідні збурення (сигнали).

Припускається, що функція $h \in (L^2(\Omega))^N$, $g(y) = (g^{ij})_{i,j=1}^N$ – задана матричнозначна функція, а також існують сталі $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$, $\gamma_i > 0$, $p \geq 2$, де $i = \overline{1, N}$ такі, що для будь-яких векторів $v \in \mathbb{R}^N$ виконуються наступні властивості:

$$\sum_{i=1}^N |f^i(v)|^{\frac{p_i}{p_i-1}} \leq C_1 \left(1 + \sum_{i=1}^N |v^i|^{p_i} \right), \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N f^i(v) v^i \geq \sum_{i=1}^N |v^i|^{p_i} - C_2;$$

$$\|g(v)\|^2 := \sum_{i,j=1}^N |g^{ij}(v)|^2 \leq C_3, Df(v) \geq C_4 \quad (3)$$

Нехай $H = (L^2(\Omega))^N$, $\|d\|_\infty = \text{esssup}_{t \geq 0} \|d(t)\|_H$, Θ – глобальний аттрактор, породжений напівгрупою $S: \mathbb{R}_+ \times H \mapsto H$, причому

$S(t, y_0) = \{y(t)|y(\cdot) - \text{глобальний слабкий розв'язок (1) при } d \equiv 0, y(0) = y_0\}$,

$\|y\|_\Theta = \inf_{\theta \in \Theta} \|y - \theta\|_H$, а також наступні добре відомі класи порівняння для функцій [17]: $\mathcal{K} = \{\gamma \in C(\mathbb{R}_+) | \gamma(0) = 0, \gamma\text{-строгозростаюча}\}$, $\mathcal{KL} = \{\beta \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) | \beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}, \beta(s, \cdot) \searrow 0\}$.

У випадку $d \equiv 0$ задача (1) є автономною, тому у фазовому просторі системи існує стійке положення рівноваги – глобальний аттрактор Θ , тобто компактна, інваріантна рівномірно притягуюча множина станів. При цьому, за наявності ненульового збурення d задача (1) вже не є автономною і для оцінки відхилення її траєкторій від положення рівноваги застосовуються два методи:

- 1) для локальної оцінки в сенсі ISS – теорія многозначних напівпотоків та функції типу Ляпунова [12, 13];
- 2) для глобальної оцінки в сенсі AG – теорія многозначних напівпроцесів, теорія рівномірних аттракторів та результат про напівнеперервну зверху залежність від параметра [14, 17].

В роботі [18] згадані результати наведені для загального випадку еволюційних систем, для яких не гарантована єдиність розв'язку.

Основний результат даної статті формулюється у наступному вигляді.

Теорема. *Задача (1)*

(i) [19] з $f \in C(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, $d = d(t, x) \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H)$ та за виконання умов (2) має властивість асимптотичного підсилення (AG) по відношенню до атрактора Θ , тобто, $\exists R_0 > 0$, $\gamma \in \mathcal{K}$ такі, що $\forall y_0 \in H, \forall \|d\|_\infty \leq R_0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, y_0, d)\|_\Theta \leq \gamma(\|d\|_\infty);$$

(ii) [20] $f \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, $d = g(y)d(t)$, $d(t) \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H)$ та за виконання умов (2), (3) має властивість локальної стійкості від входу до стану (local ISS) по відношенню до атрактора Θ , тобто, існують $r > 0$, $\beta \in \mathcal{KL}$ та $\gamma \in \mathcal{K}$ такі, що $\forall \|y_0\|_H \leq r, \forall \|d\|_\infty \leq r$

$$\|y(t, y_0, d)\|_\Theta \leq \beta(\|y_0\|_\Theta, t) + \gamma(\|d\|_\infty), t \geq 0.$$

Висновки. Стаття присвячена дослідженню робастної стійкості телекомунікаційних систем до просторово розподілених електромагнітних перешкод зі складною спектральною структурою. У ній описана стійкість граничних режимів нескінченновимірної системи типу реакції-дифузії відносно зовнішніх збурень, що є важливим для підвищення стійкості телекомунікаційних каналів і ефективності систем передавання сигналів та інформації. Основним результатом роботи

є наведення оцінки відхилення траєкторій збуреної системи від глобального атратора незбуреної системи в залежності від величини зовнішнього сигналу в термінах функцій порівняння.

Вказані результати можуть бути застосовані до різноманітних класів систем типу реакції-дифузії та за досить загальних припущень щодо їх коефіцієнтів, включаючи системи з негладкими функціями взаємодії, багатовимірні системи Лотки–Вольтерра з дифузією, моделі ФіцХ’ю–Нагумо та інші, для яких не гарантовано єдиність розв’язку задачі Коші.

Робота відкриває перспективи для подальших досліджень у сфері моделювання складних нелінійних систем, зокрема в контексті їхньої стійкості до багатовимірних і нестационарних збурень, що є актуальним для сучасних телекомунікаційних технологій.

Також можна зробити більш загальний висновок про те, що робастна стійкість до збурень є властивістю, притаманною широкому класові еволюційних процесів, що моделюються системами реакції-дифузії.

Список літератури:

1. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical Journal*, 1, 1961. Pp. 445–466. [https://doi.org/10.1016/S0006-3495\(61\)86902-6](https://doi.org/10.1016/S0006-3495(61)86902-6)
2. Smoller J. Shock Waves and Reaction–Diffusion Equations. *Springer*, 1994.
3. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. *AMS*, 68, 1997.
4. Robinson J. C. Infinite-dimensional dynamical systems. *Cambridge University Press*, 2001.
5. Melnik V. S., Valero J. On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions. *Set-Valued Analysis*, 6, 1998. Pp. 83–111.
6. Kasyanov P. O., Mel'nik V. S., Toscano S. Solutions of Cauchy and periodic problems for evolution inclusions with multi-valued ω_{λ_0} -pseudomonotone maps. *Journal of Differential Equations*, 249(6), 2010. Pp. 1258–1287.
7. Perestyuk M. O., Kapustyan O. V. Long-time behavior of evolution inclusion with non-damped impulsive effects. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, 56, 2012. Pp. 89–113. <https://doi.org/>
8. Dashkovskiy S., Kapustyan O. V., Romaniuk I. V. Global attractors of impulsive parabolic inclusions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 22(5), 2017. Pp. 1875–1886. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2017111>
9. Dashkovskiy S., Feketa P., Kapustyan O., Romaniuk I. Invariance and stability of global attractors for multi-valued impulsive dynamical systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 458(1), 2018. Pp. 193–218. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.09.001>
10. Nakonechnyi O. G., Kapustian O. A., Chikrii O. A. Approximate Guaranteed Mean Square Estimates of Functionals on Solutions of Parabolic Problems with Fast Oscillating Coefficients Under Nonlinear Observations. *Cybernetics and Systems Analysis*, 55(5), 2019. Pp. 785–795. <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00189-6>
11. Sontag E. D., Wang Y. On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems & Control Letters*, 24(5), 1995. Pp. 351–359. [https://doi.org/10.1016/0167-6911\(94\)00050-6](https://doi.org/10.1016/0167-6911(94)00050-6)
12. Mironchenko A. Local input-to-state stability: Characterizations and counterexamples. *Systems & Control Letters*, 87, 2016. Pp. 23–28. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2015.10.014>
13. Dashkovskiy S., Kapustyan O., Schmid J. A local input-to-state stability result w.r.t. attractors of nonlinear reaction–diffusion equations. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 32(3), 2020. Pp. 309–326. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1909.07022>
14. Schmid J., Kapustyan O., Dashkovskiy S. Asymptotic gain results for attractors of semilinear systems. *Mathematical Control and Related Fields*, 2021. <https://doi.org/10.3934/mcrf.2021044>
15. Khalil H. K. Nonlinear systems. Third edition. *Prentice Hall, New Jersey*, 2002.
16. Dashkovskiy S., Mironchenko A. Input-to-state stability of infinite-dimensional control systems. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 25(1), 2013. Pp. 1–35. <https://doi.org/10.1007/s00498-012-0090-2>
17. Kapustyan O. V., Kasyanov P. O., Valero J., Zgurovsky M. Z. Structure of uniform global attractor for general non-autonomous reaction-diffusion system. *Continuous and distributed systems*, 211, 2014. Pp. 221–237. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-03146-0-12>
18. Kapustyan O. V., Sobchuk V. V., Yusyypiv T. V., Pankov A. V. Robust stability of global attractors for evolutionary systems without uniqueness. *Journal of optimization, differential equations and their applications (JODEA)*, 30(3), 2022. Pp. 49–61. <http://dx.doi.org/10.15421/142208>
19. Kapustyan O. V., Kurylko O. B., Yusyypiv T. V. Robust stability of the global attractor of the reaction-diffusion system. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics*, 3, 2021. Pp. 46–50. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.6>
20. Kapustyan O. V., Yusyypiv T. V. Stability of limit regimes in general reaction-diffusion type systems. *Scientific Bulletin of Uzhgorod National University. Series: Mathematics and Informatics*, 41(2), 2022. Pp. 48–60. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).48-60](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).48-60)

Yusypiv T.V., Kurylko O.B. INVESTIGATION OF ROBUST STABILITY OF LIMIT REGIMES IN REACTION-DIFFUSION SYSTEMS WITH DISTRIBUTED SIGNAL TRANSMISSION

The article addresses the robust stability of telecommunication systems under spatially distributed electromagnetic disturbances with complex spectral structures. The primary approach relies on mathematical modeling using reaction-diffusion systems, which describe signal dynamics in environments with variable parameters. The study aims to analyze the stability of limit regimes in these systems in the presence of external perturbations.

The research focuses on dissipative systems known to possess a global attractor in the unperturbed state. When an external signal is introduced, the system becomes non-autonomous, complicating its behavior analysis. A key task is to estimate the deviation of the system's trajectories from the equilibrium position – the global attractor. To this end, the theory of input-to-state stability (ISS) is employed, offering two types of estimates: local ISS and nonlocal asymptotic gain (AG). These estimates enable a quantitative characterization of trajectory deviations based on the amplitude of the external signal.

A distinctive feature of the study is the analysis of systems with non-smooth nonlinearities, where solution uniqueness is not guaranteed. To address this, multivalued semiflows and semiprocesses are utilized, alongside the theory of uniform attractors. The study leverages a known result on the upper semicontinuous dependence of attractors on parameters, enabling the investigation of system behavior under varying external influences.

The findings are applicable to a wide range of models, including FitzHugh–Nagumo systems, multidimensional Lotka–Volterra systems with diffusion, and other reaction-diffusion models. The proposed methods enhance the reliability of telecommunication systems under unpredictable perturbations. Furthermore, the derived stability estimates can be used to optimize the performance of communication systems operating in complex electromagnetic environments and to develop new adaptive control algorithms that ensure resilience to external influences.

This work paves the way for further research into modeling complex nonlinear systems, particularly regarding their stability under multidimensional and non-stationary perturbations, which is highly relevant for modern telecommunication technologies.

Key words: signal, reaction-diffusion system, global attractor, robustness, stability.